دار المنظومة
DAR ALMANDUMAH
الرواد في قواعد المعلومات العربية

العنوان:	البرمجة الخطية و الإدارة
المصدر:	الإدارة
الناشر:	اتحاد جمعيات التنمية الإدارية
المؤلف الرئيسي:	أبو السعود، عبداللطيف
المجلد/العدد:	مج 10, ع 3
محكمة:	لا
التاريخ الميلادي:	1978
الشهر:	يناير
الصفحات:	32 - 39
رقم MD:	309516
نوع المحتوى:	بحوث ومقالات
قواعد المعلومات:	EcoLink
مواضيع:	الأرباح، البرمجة الخطية، الرسومات البيانية، القوانين الرياضية، الادارة الصناعية، الانتاجية
رابط:	http://search.mandumah.com/Record/309516

© 2021 دار المنظومة. جميع الحقوق محفوظة.
هذه المادة متاحة بناء على الإتفاق الموقع مع أصحاب حقوق النشر، علما أن جميع حقوق النشر محفوظة. يمكنك تحميل أو طباعة هذه المادة للاستخدام الشخصي فقط، ويمنع النسخ أو التحويل أو النشر عبر أي وسيلة (مثل مواقع الانترنت أو البريد الالكتروني) دون تصريح خطي من أصحاب حقوق النشر أو دار المنظومة.

البرمجة الخطية والإدارة

د. عبد اللطيف ابو السعود

بالرغم من أن البرمجة الخطية علم حديث نسبيا الا أنها قد اثبتت قيمتها كقابل مساعد في اتخاذ القرارات في دوائر الاعمال وفي الادارات الحكومية .
في المقال التالي يشرح لنا الكاتب طريقة اختيار انسب تشكيلة سلعية لمصنع ينتج اكثر من منتج واحد مع الحفاظ على أعلى نسب ربح ممكنة .

يمكن القول بأن البرمجة الخطية هى طريقة لتعيين أفضل برنامج لأنشطة معينة يعتمد بعضها على الآخر ، باستخدام الموارد المتاحة . ويشير لفظ « برمجة » الى عملية تعيين برنامج معين أو خطة للعمل . أما لفظ « خطية » فهو يعنى أن العلاقات التى تتضمنها مشكلة معينة يمكن حلها بهذه الطريقة انما هى علاقات خطية.

د . عبد اللطيف أبو السعود

وتنشأ مشكلة نلجأ فى حلها الى البرمجة الخطية كلما تنافس عنصران أو نشاطان أو أكثر على موارد محدودة ، اذا أمكننا أن نفرض أن كل العلاقات فى هذه المشكلة انما هى علاقات خطية .

وعلى سبيل المثال ،نفرض انه مطلوب تعيين برنامج لانتاج ثلاثة منتجات مختلفة يعطى كل منها ربحا نوعيا لكل وحدة . ولنفرض أن انتاج

كل منتج يحتاج الى زمن تشغيل معين فى كل من ثلاثة أقسام انتاجية مختلفة . وواضح أن المطلوب هو تعيين برنامج الانتاج الذى يعطى اكبر ربح ممكن .

الطريقة البيانية للبرمجة الخطية :

يتضح مما تقدم أن البرمجة الخطية هى طريقة لحل مشكلة معينة يتنافس فيها عنصران أو نشاطان أو اكثر على عدد من الموارد المحدودة . ويحدد توزيع هذه الموارد بهدف تكبير أو تصغير دالة الهدف الخطية (اى المكسب أو التكلفة) . وهناك عدة طرق للوصول الى هذا الهدف ، أبسطها هو الطريقة البيانية .

المشكلة :

لنفرض أن مصنعا يقوم بانتاج أدوات معدنية من ثلاثة انواع مختلفة هى أ ، ب ، جـ . ويبين الجدول التالى المعلومات اللازمة عن الانتاج والربح . والمشكلة هى تعيين مقدار ما ينتج من كل نوع ، ليمكن الحصول على اكبر ربح ممكن .

(جدول رقم ١)

القسم	نوع المنتجات المعدنية			الوقت المتاح فى الأسبوع (بالدقائق)
	أ	ب	جـ	
التقطيع	١٠ر٧	٥ر٠	٢ر٠	٢٧٠٥
التشكيل	٥ر٤	١٠ر٠	٤ر٠	٢٢١٠
التغليف	٧ر٠	١ر٠	٢ر٠	٤٤٥
الربح لكل وحدة (بالجنيهات)	٧ر٠٠	١٠ر٥٠	١٤ر٠٠	

وهذا يعنى مثلا ، أن انتاج وحدة من المنتج أ يحتاج الى ١٠ر٧ دقيقة من زمن التشغيل فى قسم التقطيع ، و ٥ر٤ دقيقة فى قسم التشكيل ، و ٧ر٠ دقيقة فى قسم التغليف . وتعطى هذه الوحدة من هذا النوع من المنتجات ربحا قدره ٧ جنيهات عند بيعها . وتبلغ السعة الكلية المتاحة فى قسم التقطيع ٢٧٠٥ دقائق .

الحالة ثنائية الأبعاد :

يلاحظ أن مشاكل البرمجة الخطية التى يتنافس فيها عنصران أو ثلاثة على الموارد المتاحة ، يمكن حلها بالطريقة البيانية . ذلك أنه يمكن رسم شكل يمثل فراغا ذا بعدين أو ثلاثة .

ولتسهيل تصوير الطريقة البيانية للبرمجة الخطية ، سنفرض أن مصنع الأدوات المعدنية السابق ذكره قرر الاقتصار على انتاج النوعين أ ، ب . ويمثل الجدول التالى البيانات اللازمة .

(جدول رقم ٢)

القسم	نوع المنتجات المعدنية		الزمن المتاح فى الأسبوع
	أ	ب	
التقطيع	١٠ر٧	٥ر٠	٢٧٠٥
التشكيل	٥ر٤	١٠ر٠	٢٢١٠
التغليف	٧ر٠	١ر٠	٤٤٥
الربح لكل وحدة (بالجنيهات)	٧ر٠٠	١٠ر٥٠	

وتستلزم الطريقة البيانية ترجمـــــة البيانات السابقة الى لا متساويات .

اذا فرضنا أن عدد وحدات المنتجين أ ، ب هما س ، ص ، فان لا متساوية قسم التقطيع هى ٧ر١٠ س + ٥ر٠ ص ≥ ٢٧٠٥ (١)

ولا متساوية قسم التشكيل هى ٤ر٥ س + ١٠ر٠ ص ≥ ٢٢١٠ (٢)

ولا متساوية قسم التغليف هى ٧ر٠ س + ١ر٠ ص ≥ ٤٤٥ (٣)

والهدف هنا هو تعيين زوج على الأقل من قيم س و ص ، تناسب القيود التركيبية التى تمليها اللامتساويات السابقة ، والتى تؤدى الى أعلى مستوى ممكن للدالة ١٠ س + ١٥ ص .

تحويل اللامتساويات الى رسم بيانى :

لتعيين الجزء المقطوع من كل من المحورين السينى والصادى للامتساوية رقم (١) :

للامتساوية رقم (١)

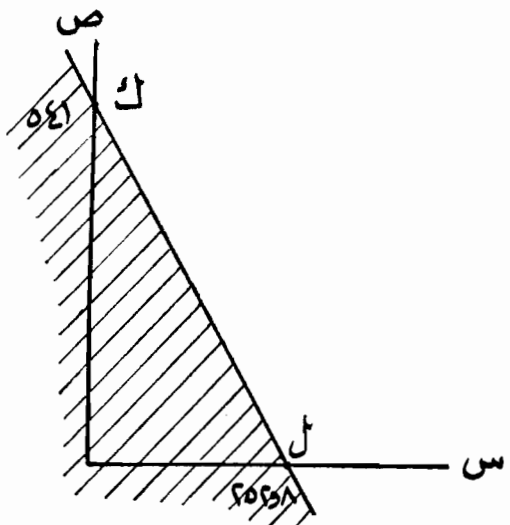
عند س = صفرا ، ص = ٢٧٠٥ ÷ ٥ = ٥٤١ نقطة ك

عند ص = صفرا ، س = ٢٠٧٥ ÷ ٧ر١٠ = ٢٥٢ر٨ نقطة ل

وتوصيل النقطتين ك ، ل يعطى خطا مستقيما معادلته هى ٧ر١٠ س + ٥ ص = ٢٧٠٥

ولكننا لا نرغب فى رسم هـــذه المعادلة ، اذ يهمنا رسم اللامتساوية ٧ر١٠ س + ٥ ص ≥ ٢٧٠٥

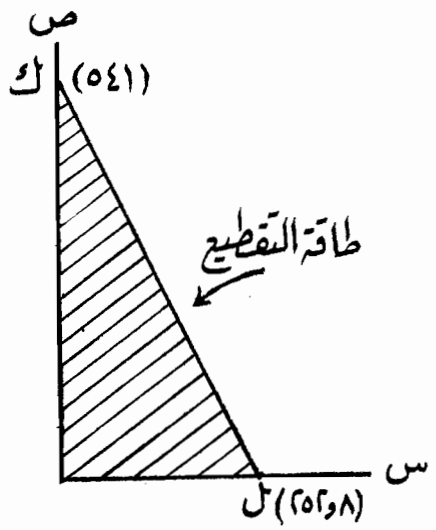
وعلى ذلك فان المساحة المظللة هى المنطقة التى تهمنا . وواضح أن هـــذه المنطقة المظللة تشمل قيما سالبة لكل من س ، ص ، وهذه تعنى انتاجا سالبا ، وليس لها مقابل فيزيائى حقيقى .



شكل ١

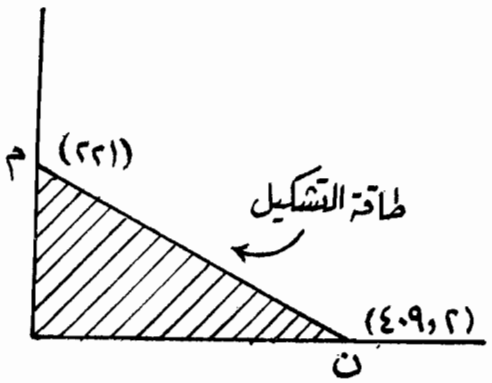
ولاستبعاد احتمالات الانتاج السالب ، فاننـــا ندخل عددا من قيود عدم السلبية : س ≥ صفرا ، ص ÷ صفرا . وهذا يعنى اننا مقيدون بانتاج يساوى صفرا أو أكثر من وحدات المنتجين أ ، ب .

واضافة قيود عدم السلبية هذه يجعـــل مساحة الحلول الممكنة مقصورة على الربع الأول من المستوى س ص ، كما فى شكل ٢ .



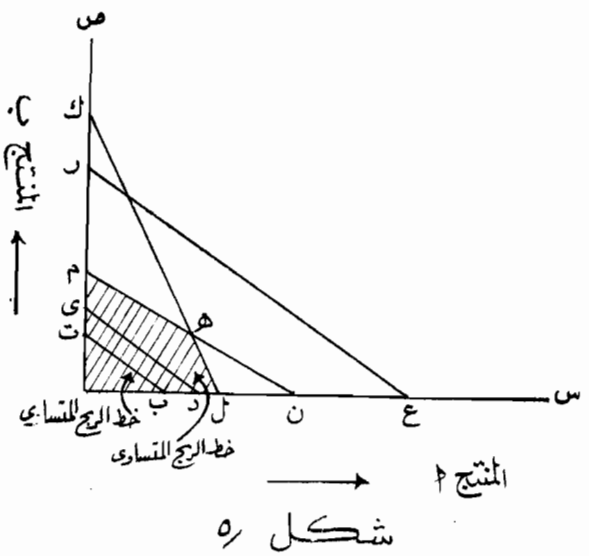
شكل ٢

وبالمثل ، فان شكلى ٣ ، ٤ يمثلان مساحتى الحلول اللاسلبية الممكنة لطاقتى التشكيل والتغليف على الترتيب . واذا رسمنا الأشكال الثلاثة فى شكل واحد (شكل ٥) ، فان المنطقة المظللة تمثل منطقة جميع الحلول الممكنة فى هذا الموضوع .



شكل ٣

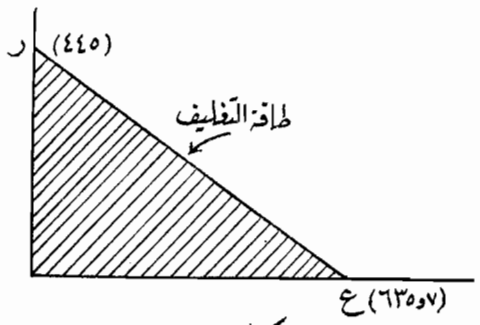
وبعبارة أخرى ، هناك عدد لا نهائى من الحلول لهذه المشكلة ، اذا فرضنا أن وحدات الانتاج قابلة للتجزئة . والهدف هنا هو اختيار نقطة واحدة على الأقل (س ، ص) من المساحة المظللة فى شكل ٥ ، تجعل دالة الربح أكبر ما يمكن .



شكل ٥

ورسم شكل ٥ هو الخطوة الأولى فى حل هذه المشكلة بالطريقة البيانية .

وأى نقطة فى المساحة المظللة و/ أو على الحد الفاصل للمساحة المظللة فى شكل ٥ ، تمثل حلا ممكنا .



شكل ٤

ماذا يمكن عمله للوصول الى ذلك الهدف ؟ عند هذه المرحلة تقودنا دالة الربح . فاذا أمكن رسم دالة الربح على شكل ٥ ، وتحديد الاتجاه الذى تزيد فيه ، أكبر ما يمكن ، ثم نبدأ فى التحرك ، ونستمر فى الحركة فى هذا الاتجاه ، فانها ستلمس بعد حين أبعد نقطة على الحد الفاصل للمساحة المظللة .

وتمثل هذه النقطة الحل الوحيد الأفضل ، أو أحد حلول كثيرة ممكنة . والطريقة البيانية تحقق هذا كله بطريقة منظمة .

خطوط الربح المتساوى :

والرسم البيانى لدالة الربح قد يبدو للوهلة الأولى صعبا ، لأن دالة الربح ١٠ س + ١٥ ص ليست فى صورة معادلة ، وبالتالى فانه لا يمكن رسمها بيانيا . ولكن يمكننا التغلب على هذه الصعوبة بمحاولة الاجابة على السؤال البسيط التالى : كم وحدة من المنتج س وحده (أو المنتج ص وحده) تلزم لاعطاء مساهمة فى الربح

مقدارها ١٠٥٠ر٠٠ جنيه ولما كانت المساهمة فى الربح لكل وحدة من المنتج س هى ٧ جنيهات، فان الاجابة على السؤال هى ١٥٠ وحدة من المنتج س . وبالمثل ، فانه لما كانت مساهمة ص فى الربح هى ٥ر١٠ جنيه لكل وحدة ، فانه يلزم انتاج ١٠٠ وحدة من ص للحصول على ربح قدره ١٠٥٠ جنيها . وعلى ذلك ، فان نقطتى ربح متساو فى شكل ٥ تمثلهما س = ١٥٠ ، ص = صفرا ، س = صفرا ، ص = ١٠٠ أو بعبارة أخرى (١٥٠ ، صفر) و (صفر ، ١٠٠) . اذا وصلنا الى هاتين النقطتين ، نحصل على خط الربح المتساوى ب ت ، وكل النقط على هذا الخط تمثل حلولا محتملة لأنها تقع فى المساحة المظللة ، وكل منها يعطى مساهمة فى الربح تبلغ ١٠٥٠ جنيها . وعلى هذا فان خط الربح المتساوى هو موقع كل النقط التى تعطى نفس الربح .

وبنفس الطريقة يمكن رسم خطوط أخرى للربح المتساوى تعطى مستويات مختلفة للمساهمة فى الربح . والخط د ى فى شكل ٥ يمثل خط الربح المتساوى لمبلغ ١٤٧٠ر٠٠ جنيه . وبمقارنة الخطين د ى ، ب ت نجد أن خط الربح المتساوى لمبلغ ١٤٧٠ جنيها (د ى) موازٍ لخط الربح المتساوى لمبلغ ١٠٥٠ جنيها (ب ت) ، وأكثر بعدا عن نقطة الأصل . وهذا أمر منتظر ، لأن المساهمات فى الربح لكل وحدة من المنتجين ثابتة ، ولأنه يمكن الحصول على ربح أكبر كلما بعدنا عن نقطة الأصل . وبقليل من التفكير ، يمكن الوصول الى أنه يلزمنا مواصلة رسم خطوط ربح متساوٍ لأرباح أكبر ، ما دمنا داخل مساحة الحلول الممكنة . وواضح أنه يجب أن نتوقف عندما نصطدم بأحد أركان متعدد الأضلاع المحدب ، أو بأحد أضلاعه . وفى كلتا الحالتين ، نكون قد وصلنا الى أفضل الحلول .

ايجاد أفضل الحلول :

فى محاولة تعظيم الربح لعملية لا تشمل الا عنصرين متنافسين ، فان خط الربح المتساوى الأكثر بعدا عن نقطة الأصل ، والواقع فى مساحة الحلول الممكنة ، يستخدم لتعيين الحل الأفضل . الا أن هناك حالتين قد تنشآن . فى الأولى ، قد ينطبق خط الربح المتساوى على أحد الخطوط المحددة لمتعدد الأضلاع المحدب . وفى هذه الحالة ، نجد أن جميع النقط على ذلك الخط الفاصل الذى ينطبق على خط الربح المتساوى هى حلول ممكنة ، كما أنها حلول أفضل . وفى الحالة الثانية ، لا ينطبق خط الربح المتساوى على أحد الخطوط المحددة لمتعدد الأضلاع المحدب .

فاذا كانت الحالة كذلك ، فان احدى نقط الأركان لمتعدد الأضلاع المحدب تعطى الحل الأفضل الوحيد .

وفى حالتنا هذه ، نلاحظ أن خط الربح المتساوى الأكثر بعدا عن نقطة الأصل ، والذى يقع فى مساحة الحلول المنظورة ، يمر بالنقطة هـ . وعلى ذلك ، فان النقطة هـ تمثل الحل الأفضل بين عدد لا نهائى من الحلول الذى يمثل المنطقة المظللة فى شكل ٥ .

ويمكن تعيين احداثيى النقطة هـ من الرسم البيانى مباشرة ، أو بالحل الآتى للخطين المتقاطعين عند النقطة هـ . ومعادلتا هذين الخطين اللذين يمثلان طاقة التقطيع وطاقة التشكيل ، معروفتان مما سبق . وفيما يلى طريقة تعيين احداثيى النقطة هـ .

بالنسبة لقسم التقطيع

٧ر١٠ س + ٠ر٥ ص = ٢٧٠٥

أو ص = ٥٤١ — ٤ر١٢س (٤)

وبالنسبة لقسم التشكيل

٤ر٥ س + ٠ر١٠ص = ٢٢١٠

أو ص = ٢٢١ — ٥٤ر٠س (٥)

وبمساواة (٤) ، (٥) ، نجد أن

٥٤١ — ٤ر١٢س = ٢٢١ — ٥٤ر٠س

أو س = ٢٠٠ (٦)

وبالتعويض فى (٤)

ص = ٥٤١ — ١٤ر٢ (٢٠٠)

= ٥٤١ — ٤٢٨ = ١١٣

وعلى ذلك . فان أنسب الحلول هو انتاج ٢٠٠ وحدة من س (المنتج أ) و ١١٣ وحدة من ص (المنتج ب) . وعائد هذا البرنامج هو :

١٠ (٢٠٠) + ١٥ (١١٣) = ٥ر٢٥٨٦ جنيها .

وبالتعويض بالقيم س = ٢٠٠ ، ص = ١١٣ فى اللامتساويات (١) الى (٣) ، نلاحظ أن هذا البرنامج يستخدم كل امكانيات طاقات قسمى التقطيع والتشكيل ، ولكنه يترك ١٩٢ وحدة من طاقة قسم التغليف غير مستعملة . ويمكن ملاحظة ذلك بالنظر الى شكل ٥ ، حيث نجد أن خط طاقة التغليف يقع بعيدا فوق المساحة المظللة .

استخدام الطريقة البيانية فى الحالة ذات الأبعاد الثلاثة :

نعود الآن الى حالة المصنع الذى ينتج المنتجات أ ، ب ، جـ . ونعيد فيما يلى كتابة الجدول رقم ١ .

(جدول رقم ٣)

القسم	نوع المنتجات المعدنية أ	ب	جـ	الوقت المتاح فى الأسبوع (بالدقائق)
التقطيع	١٠ر٧	٥ر٠	٢ر٠	٢٧٠٥
التشكيل	٥ره	١٠ر٠	٤ر٠	٢٢١٠
التغليف	٧ر٠	١ر٠	٢ر٠	٤٤٥
ربح الوحدة بالجنيهات	٧ر٠٠	١٠ر٥٠	١٤ر٠٠	

ويمكن التعبير عن هذه البيانات بلامتساوية لكل قسم

فلقسم التقطيع ، نجد أن

١٠ر٧ س + ٥ر٠ ص + ٢ر٠ ع ≤ ٢٧٠٥ (٧)

أما بالنسبة لقسم التشكيل ، فنجد أن

٥ره س + ١٠ر٠ ص + ٤ر٠ ع ≤ ٢٢١٠ (٨)

أما بالنسبة لقسم التغليف ، فان

٧ر٠ س + ١ر٠ ص + ٢ر٠ ع ≤ ٤٤٥ (٩)

أما الدالة التى يجب تعظيمها فهى :

٧ س + ١٠ر٥ ص + ١٤ ع

ونظرا لأن هناك مجاهيل ثلاثة (س ، ص ، ع) فى هذه الحالة ، فان التمثيل البيانى يجب أن يكون فى الفراغ ثلاثى الأبعاد . وكما سبق ، فاننا نفرض قيود عدم السلبية :

س ≥ صفرا ص ≥ صفرا ع ≥ صفرا

ثم نبدأ فى رسم كل لا متساوية فى حالتها المحددة ، أى نعتبرها معادلات . ولما كانت هذه المعادلات تحتوى على مجاهيل ثلاثة ، كما انها خطية ، فان كلا منها يعطى مستوى واحدا عند تمثيله بيانيا بالأبعاد الثلاثة .

ولرسم المستوى الذى يبين طاقة قسم التقطيع ، فانه من اللامتساوية رقم (٧) يتبين

انه اذا كانت ص ، ع = صفرا ، فان س = ٢٥٢ر٨

واذا كانت س ، ع = صفرا ، فان ص = ٥٤١ .

واذا كانت س ، ص = صفرا ، فان ع = ١٣٥٢ر٥

وهذا يعطى المستوى ا ب جـ فى شكل ٦

اما بالنسبة لقسم التشـــكيل (اللامتساوية رقم (٨))

فانه اذا كانت ص ، ع = صفرا فان س = ٤٠٩ر٢

س ، ع = صفرا فان ص = ٢٢١

س ، ص = صفرا فان ع = ٥٥٢ر٥

وهذا يعطى المستوى د هـ و فى شكل ٦

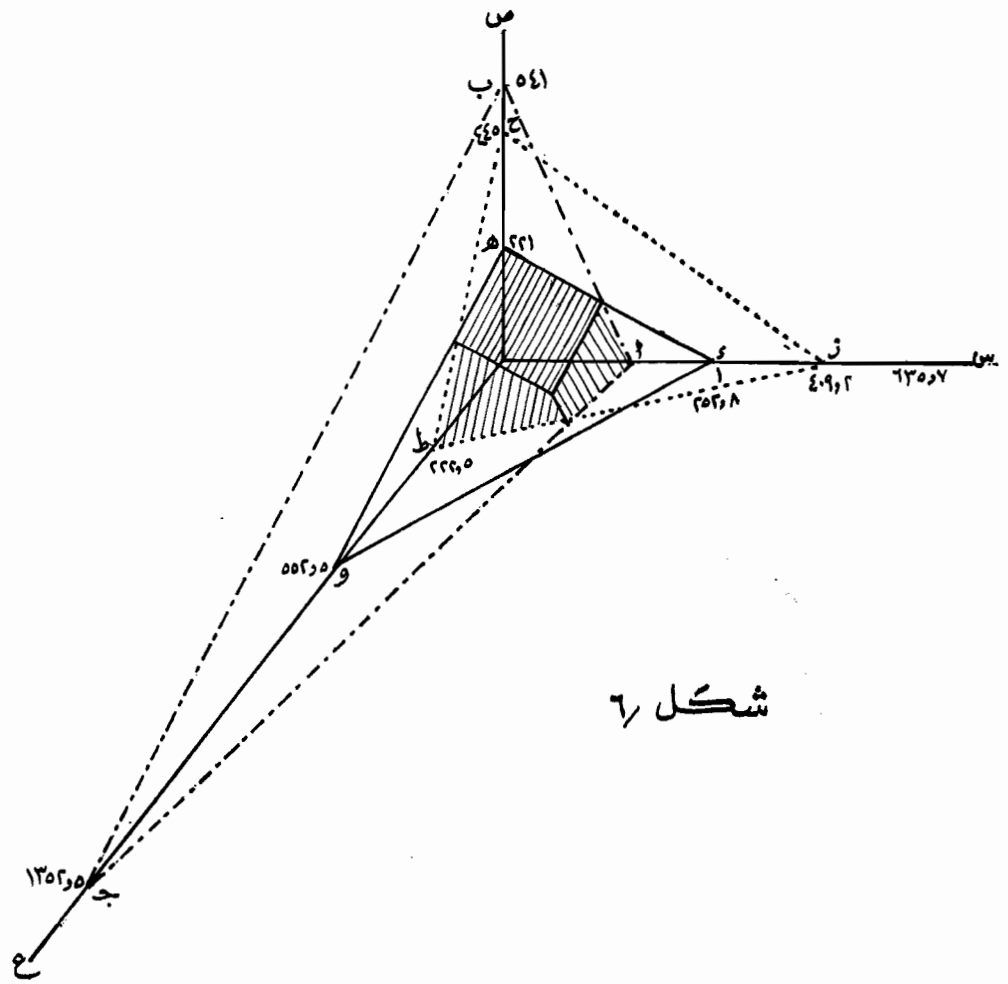
اما بالنسبة لقسم التغليف (اللامتساوية رقم (٩)) فنجد انه :

اذا كانت ص ، ع = صفرا فان س = ٦٣٥ر٧

س ، ع = صفرا فان ص = ٤٤٥

س ، ص = صفرا فان ع = ٢٢٢ر٥

وهذا يعطى المستوى ز ح ط فى شكل ٦



شكل ٦/

نجد أن المستويات الثلاثة (أ ب ج ، د هـ و، ز ح ط) ، والمحاور الثلاثة س ، ص ، ع تعطى فراغا صلبا ثلاثى الأبعاد ، يحتـــوى على كل الحلول الممكنة لهذه المشكلة ، وذلك عندما تكون س ≥ صـــفرا ، ص ≥ صفرا ، ع ≥ صفرا .

والسؤال التالى هو : أى الحلول أفضلها ؟

وللبحث عن أفضل الحلول ، نرسم مستوى للربح المتساوى . فمثلا ، لرسم مستوى الربح المتساوى الذى يمثل ربحا قدره ٦٣٠ جنيها ، نرسم مستوى أركانه هى س = ٩٠ ، ص = ٦٠ ، ع = ٤٥ . ثم نبدأ فى تحريك هذا المستوى بعيدا عن نقطة الأصل . وبعبارة أخرى ، فاننا نرسم مستويات ربح أعلى ، موازية لهـــذا المستوى ، ولكنها ما زالت فى منطقة الحـــلول الممكنة . وأثناء تحريك هذا المستوى بعيدا عن نقطة الأصل ، فاننا نصل الى وضع يلمس فيـــه هذا المستوى السطح الخارجى، أو الركن الأبعد لمتعدد الأوجه المحدب الذى يحتوى على الحلول الممكنة . ونقطة (أو نقط) التلامس هـــذه فى الفراغ ذى الأبعاد الثلاثة هى الحل الأمثـــل . والاحداثيات فى هذه الحالة هى س = ٢٠٠ ، ص = ٦٥ ، ع = ١٢٠ . وهذا هو الحـــل الأفضل ، وهو يعطى ربحـــا قدره ٣٧٦٢ر٥٠ جنيهـــا .

وبالتعويض بقيم س = ٢٠٠ ، ص ٦٥ ، ع = ١٢٠ فى اللامتساويات (٧) الى (٩) ، نجد أن هذا البرنامج يستخدم طاقات الأقسام كلها استخداما كاملا .

حل جديد لمشـــكلة ارتفـــاع معدل ترك العمل

تجد بعض الشركات صعوبة فى الاحتفاظ بموظفيها كنفس الصعوبة التى تواجههـــا فى الحصول عليهم ، ولكن روبرت مورلى مدير احدى الشركات فى المملكة المتحدة يعتقد أنه قد وجد حلا موفقا لهذه المشكلة مع موظفى شركته البالغ عددهم ٣٠٠ . فقد استخدم لخفض المعدل المرتفع لترك العمل بينهم فكرة تقديم رحـــلات مجانية لكل من أمضى منهم عـــامين فى خدمة الشركة ، وتنفيذا لذلك فقد بعث بمجموعة منهم لقضاء اجازة نهاية الاسبوع فى باريس على حساب الشركة .

ولنجاح فكرته فقد وعد فى العام القادم أن يتيح للموظفين قضاء أسبوع كامل فى أى وقت خلال العام فى أى مكان فى بريطانيا يرغبون فيه ، وسوف تتحمل الشركة جميع النفقـــات بما فى ذلك مصروفات السفر والاقامة ، وقد قيل للموظفين ان مثل هذه الرحلات المجانية انما تمنح لهم تقريرا لعملهم .

(مجلة الادارة الدولية ــ يوليه ١٩٧٣)